岡山大学大学院環境生命自然科学研究科
2024年度博士前期課程入学試験問題
機械システム都市創成科学学位プログラム
知能機械システム学コース

数学

注意事項

1．解答始めの合図があるまで、中の頁を見てはいけない。
2．問題用紙は４枚ある。
3．解答用紙は、[1]、[2]、[3]、[4]の４枚および下書き用紙１枚の計５枚ある。
4．解答始めの合図があったら、中の頁を見て枚数を確認すること。また、すべての解答用紙に、受験番号、氏名を記入すること。
5．解答は、それぞれの問題の解答欄に記入すること。他の問題の解答を記入してはいけない。
6．解答欄が足りないときは、同じ問題の解答用紙の裏に記入してもよいが、その場合、裏に記入していることを表の頁に書いておくこと。

令和５年８月２３日
岡山大学大学院環境生命自然科学研究科
機械システム都市創成科学学位プログラム
知能機械システム学コース

数　学

[1] 問い (1)〜(3) に答えよ。

(1) 以下の定積分を求めよ。

(a) $$\int_0^3 \frac{x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,dx$$

(b) $$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$$

(2) 以下の重積分を変数変換を用いて求めよ。ただし、積分範囲 $\Omega = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 + x_2 \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq x_1 - x_2 \leq \frac{\pi}{2}\}$ とする。

$$\iint_{\Omega} (x_1 + x_2)\cos(x_1 - x_2)\,dx_1 dx_2$$

(3) 点(x_1, x_2)が条件$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$を満たすとき、$g(x_1, x_2) = x_1 x_2$の極値とそれを与える$(x_1, x_2)$の組をラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ。

数　学

[2] 問い (1)〜(2) に答えよ。

(1) R^3 における次のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ について考える。α は実数である。このとき、以下の小問 (a)〜(d) に答えよ。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

(a) 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3]$ の行列式 $|A|$ を計算せよ。

(b) ベクトルの組 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が 1 次従属であるときの α を求めよ。

(c) 問 (b) で求めた α に対し、行列 A の階数を求めよ。

(d) 次のベクトル $\boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ の 1 次結合で表されることを示せ。

$$\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 27 \end{bmatrix}$$

(2) P を n 次正則行列とするとき、以下の小問 (a)〜(b) に答えよ。

(a) 正則行列 P の行列式を $|P|$ としたとき、$|P^{-1}| = 1/|P|$ が成り立つことを示せ。

(b) n 次正方行列 A の固有値と行列 $P^{-1}AP$ の固有値は等しいことを示せ。

数　学

[3] 次の強制振動を表す微分方程式について、以下の問いに答えよ。

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \sin t, \quad y(0) = 0$$

(1) 解を求めよ。

(2) 時間 t が十分経過した後の振動は、右辺の正弦波が変調されたものになっている。元の正弦波 $(\sin t)$ に対する振幅比、位相差を答えよ。

数　学

[4] 問い(1)～(2)に答えよ。

(1) 次の(a), (b)の逆ラプラス変換を求めよ。

(a) $\dfrac{s+2}{s^2-8s+18}$

(b) $\dfrac{s+1}{s^2(s+3)}$

(2) 周期 T の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数展開は次の式で定義される。

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t), \quad \omega_n = 2\pi n/T$$

次の問い(a)～(b)に答えよ。

(a) 次の関数 $f(t)$ をフーリエ級数に展開せよ。

$$f(t) = t^2 \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

(b) (a)で得られたフーリエ級数展開に、パーセバルの等式

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{f(t)\}^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

を適用することにより、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ の値を求めよ。