２０２３年１０月入学，２０２４年４月入学

大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 数理科学コース

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

数　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は３枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，問題番号と共に１枚の解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２３年１０月入学，２０２４年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科　博士前期課程　数理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学）】

問題は全部で７問ある。A 系統（[A-1]〜[A-4]）から３題を選択，B 系統（[B-1]〜[B-3]）からは２題を選択して，計５題について解答せよ。ただし，以下の問題文中の $\mathbb{Z}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ は，すべての整数からなる集合，すべての実数からなる集合，すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1]　次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) (1) より -1 は A の固有値であるが，-1 に属する A の固有空間の基底を一組求めよ。

(3) A が対角化可能かどうか判定せよ。

(4) A のジョルダン標準形を求めよ。

[A-2] 複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 上の線形変換 f に対して，以下の条件 (A)，(B) を考える：

(A) $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$

(B) $f^3 \neq 0$ かつ $f^4 = 0$

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 (A) を満たす $\mathbb{C}^2$ 上の線形変換 f は存在するか否か，理由とともに答えよ。

(2) 条件 (A) を満たす $\mathbb{C}^3$ 上の線形変換 f は存在するか否か，理由とともに答えよ。

(3) 条件 (B) を満たす $\mathbb{C}^3$ 上の線形変換 f は存在するか否か，理由とともに答えよ。

(4) 条件 (B) を満たす $\mathbb{C}^4$ 上の線形変換 f は存在するかするか否か，理由とともに答えよ。

(5) 条件 (A)，(B) をともに満たす $\mathbb{C}^4$ 上の線形変換 f は存在するか否か，理由とともに答えよ。

[A-3] 広義積分

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

を考える。ただし，$a,b>0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $B(a,b)<+\infty$ であることを示せ。

(2) 等式

$$B(a,b+1)=\frac{b}{a}B(a+1,b)$$

が成り立つことを示せ。

(3) a,b が正の整数のとき，等式

$$B(a,b)=\frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

が成り立つことを示せ。

(4) $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。

[A-4] $\Lambda=\{z\in\mathbb{C}:|\mathrm{Im}\,z|<1\}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $f:\Lambda\to\mathbb{C}$ は正則関数で，任意の実数 x に対して $f(x+1)=f(x)$ を満たすとする。このとき，任意の $z\in\Lambda$ に対して $f(z+1)=f(z)$ となることを示せ。

(2) (1) の正則関数 f と $n\in\mathbb{Z}$, $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$a_n=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}nx}dx,\qquad A(\varepsilon)=\max\{|f(z)|:|\mathrm{Im}\,z|=\varepsilon\}$$

とおく。このとき

$$|a_n|\le A(\varepsilon)e^{-2\pi|n|\varepsilon}\quad(n\in\mathbb{Z},\ \varepsilon\in(0,1))$$

が成り立つことを示せ。

(3) 複素数列 $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は，関数 $B:(0,1)\to[0,\infty)$ が存在して

$$|b_n|\le B(\varepsilon)e^{-2\pi|n|\varepsilon}\quad(n\in\mathbb{Z},\ \varepsilon\in(0,1))$$

が成り立つとする。このとき

$$g(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_ne^{2\pi\sqrt{-1}nz}$$

とおくと，$g:\Lambda\to\mathbb{C}$ は正則関数であることを示せ。

【B 系統】

[B-1] 2 次の正方行列

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

から生成される $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の部分群を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\tau = \sigma\theta$ とおくとき，σ，τ の位数を求めよ。また，$\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1}$ が成り立つことを示せ。

(2) G は位数 8 の非可換群であることを示せ。

(3) G の共役類をすべて求めよ。

(4) G の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ の位数を求めよ。

[B-2] X と Y をそれぞれ位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする。以下の問いに答えよ。

(1) X の部分集合 A がコンパクトであることの定義を述べよ。

(2) X の部分集合 A がコンパクトであるとき，像 $f(A)$ はコンパクトであることを示せ。

(3) n を正の整数とする。X がコンパクト空間，Y が n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ であるとき，以下の (a), (b), (c) を示せ。

(a) f は全射でない。

(b) X の閉集合 B はコンパクトである。

(c) f が単射のとき，$f : X \to f(X)$ は同相写像である。ただし，$f(X)$ は $Y = \mathbb{R}^n$ の部分空間として考える。

[B-3] $a > 0, b > 0$ が与えられたとして

$$f(x,y) = ax^2 + by^2$$

とし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

を求めよ。

(2) $b = a$ とする。積分

$$\iint_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\,dxdy$$

を求めよ。ここで，∇f は f の勾配である。