２０２３年１０月入学，２０２４年４月入学

大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 物理科学コース

試験問題　＜一般入試＞

専 門 科 目

物 理 学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２３年１０月入学，２０２４年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

図１に示すように，長さ ℓ の糸の上端を固定して，下端に質量 m のおもりを付けた２個の振り子が，ばね定数 k のばねで接続されている。ばねの自然長は２個の振り子の支点間の距離 a に等しい。この２個の振り子を１つの鉛直面内で微小振動させる場合を考える。θ_1, θ_2 を糸と鉛直線のなす角とし，重力加速度の大きさを g とする。なお，糸とばねの質量およびおもりの大きさは無視できる。以下の問いに答えよ。

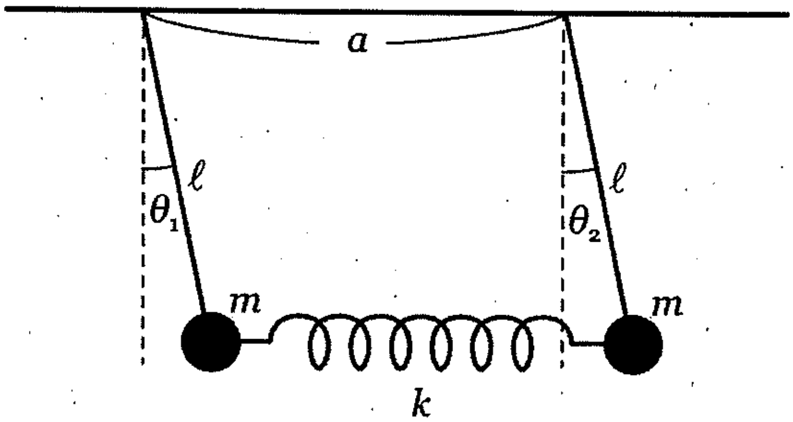

図１

(1) この系の運動エネルギーを求めよ。
(2) この系のポテンシャルエネルギーを求めよ。ただし，ポテンシャルエネルギーの基準は $\theta_1 = \theta_2 = 0$ のときとする。
(3) 問(1)の運動エネルギーと問(2)のポテンシャルエネルギーから，この系のラグランジアンを求めよ。
(4) この系におけるラグランジュの運動方程式を求めよ。
(5) 微小振動（$\theta_1 \ll 1, \theta_2 \ll 1$）における問(4)の運動方程式を解いて，この系の基準振動の固有角振動数を求めよ。
(6) 一方のおもりを静止させ（$\theta_2 = 0$），他方のおもりを鉛直面内で少しずらして（$\theta_1 = \theta$）から静かにおもりを離す。このときの θ_1 と θ_2 の時間変化を求めよ。
(7) ばね定数 k が十分に小さい場合の θ_1 と θ_2 の時間変化をグラフに図示せよ。

２０２３年１０月入学，２０２４年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

二つの円形コイルを用いて，特定の空間に一様な磁場を作り，その中での荷電粒子の運動を調べたい。まず，円形コイルの作る磁場分布について，以下の問いに答えよ。ただし，円形コイルは真空中に置かれており，導線の太さは無視できるものとする。また，真空の透磁率は μ_0 とする。

(1) 図２(a)に示す円形コイル(半径 R)に，電流 I を流す。円の中心 O から，コイルの中心軸上 z だけ離れた点 P における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさを求め，その z 依存性をグラフに図示せよ。
(2) 図２(b)に示すように，半径 R の二つの円形コイルを，同じ中心軸を持つように距離 $2a$ だけ離して配置し，二つのコイルに，同じ方向に電流 I を流す。二つのコイルの中点 O を原点とし，点 O から中心軸上 z だけ離れた点 P における $\boldsymbol{B}$ の大きさを求め，その z 依存性をグラフに図示せよ。
(3) 二つのコイルの間隔 $2a$ を変えることで，中点 O の周囲に一様な磁場を作ることを考える。$2a = R$ のとき磁場がほぼ一様となることを，B を $z = 0$ の周りでテイラー展開することで証明せよ。

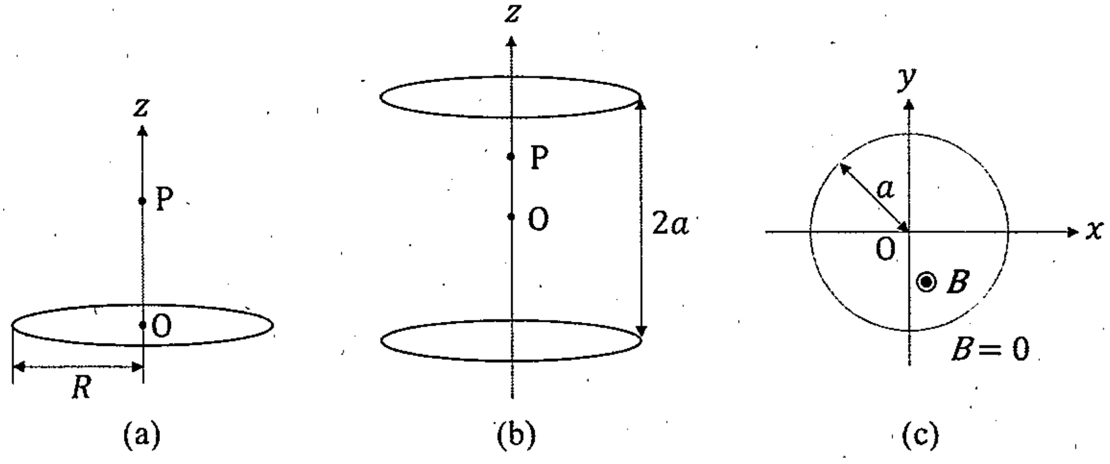

図２

図 2 (b) において，コイルの中心軸 (z 軸) に垂直な方向に x，y 軸をとる。このとき，問 (3) の条件で得られた磁場を，z 軸方向だけでなく，xy 平面内にも中心から距離 a 程度までは一様と見なそう。簡単のため，図 2 (c) に示すように，原点を中心とする半径 a の円の内部にのみ一様な磁束密度 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ があるものとする。すなわち，xy 平面内における原点からの距離を r とすると，

$$B(r) = \begin{cases} B\ (> 0), & r \le a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

である。このような一様磁場中での荷電粒子の運動について，以下の問いに答えよ。ただし，荷電粒子の質量を m，電荷を q $(q > 0)$ とし，荷電粒子の速度は，光速と比較して十分遅いものとする。

(4) 時刻 $t = 0$ における荷電粒子の位置と速度をそれぞれ $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, 0)$，$\boldsymbol{v}(0) = (v_0, 0, 0)$ $(v_0 > 0)$ とする。時刻 $t > 0$ における荷電粒子の運動を，その軌跡を図示し説明せよ。また，$B \ge B_0$ を満たすとき，荷電粒子は図 2 (c) に示す半径 a の円の内部を運動し続ける。B_0 を求めよ。

(5) $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ と同時に，一様な静電場 $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$ $(E > 0)$ を加える。時刻 $t > 0$ における荷電粒子の運動を，その軌跡を図示し説明せよ。ただし，時刻 $t = 0$ において荷電粒子は，図 2 (c) の原点に静止しているものとする。また，$B \gg B_0$ とする。

２０２３年１０月入学，２０２４年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第３問

水素原子において原子核からの中心力を受けて運動する電子について考える。原子核と電子の距離を r とする。電子の質量を m，電気素量を e，プランク定数を $h\,(=2\pi\hbar)$，真空の誘電率を ε_0 とする。必要であれば次の積分公式を用いても良い。

$$\int_0^\infty x^k \mathrm{e}^{-\alpha x}dx = \frac{k!}{\alpha^{k+1}} \qquad (k\text{ は負でない整数})$$

定常状態の電子の波動関数 ψ は，シュレーディンガー方程式

$$H_0\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = E\psi$$

の固有関数として求めることができる。ここで，原子核は原点に静止しているとしている。中心力場における運動では三次元極座標 (r,θ,ϕ) を用いて $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$ の形に書くことができ，シュレーディンガー方程式は $R(r)$ および $Y(\theta,\phi)$ の従う方程式に分離することができる。水素原子において $R(r)$ の従う方程式は，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr}\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}R(r) = ER(r)$$

となる。ここで，E はエネルギー固有値である。以下の問いに答えよ。

(1) 基底状態の $R(r)$ が

$$R(r) = A\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_0}}$$

の形に表されるとき，規格化の条件を利用して $A\,(>0)$ を求めよ。ここで a_0 はボーア半径である。

(2) このとき，基底状態のエネルギー固有値を求めよ。また，a_0 を m，e，$\hbar$，ε_0 を用いて表せ。

(3) 電子が r と $r+dr$ の間の球殻に見出される確率は

$$P(r)dr = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}|R(r)|^2|Y(\theta,\phi)|^2r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

で表される。基底状態における $P(r)$ を求め，その概形を描け。なお，$Y(\theta,\phi)$ は規格化さ

れているとする。

水素原子における電子の固有関数は，三つの量子数 n，l，m_l により指定され，$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi)$ と表すことができる。基底状態 $(n=1)$ および第一励起状態 $(n=2)$ の規格化された固有関数は以下のとおりである。

$$\psi_{1,0,0}(r,\theta,\phi) = |\,1,0,0\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi {a_0}^3}} \mathrm{e}^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$\psi_{2,0,0}(r,\theta,\phi) = |\,2,0,0\,\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2\pi {a_0}^3}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{2,1,0}(r,\theta,\phi) = |\,2,1,0\,\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2\pi {a_0}^3}}\frac{r}{a_0}\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a_0}}\cdot\cos\theta$$

$$\psi_{2,1,\pm1}(r,\theta,\phi) = |\,2,1,\pm1\,\rangle = \frac{1}{8\sqrt{\pi {a_0}^3}}\frac{r}{a_0}\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a_0}}\cdot\sin\theta\ \cdot\mathrm{e}^{\pm i\phi}$$

基底状態にある水素原子に z 軸方向に向いた次のような一様な電場 $\mathcal{E}(t)$ を加え，

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ \mathcal{E}_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} & (t \geqq 0) \end{cases}$$

十分長い時間の後に第一励起状態に遷移する確率を求める。摂動論によれば，時刻 $t=0$ に $|\,i\,\rangle$ の固有状態にあった系が，外からの摂動 $\hat{V}(t)$ の作用によって時刻 t に別の固有状態 $|\,f\,\rangle$ に遷移する確率振幅は，第一近似のもとで，

$$C_{f,i}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle f|\hat{V}(t')|i\rangle\, \mathrm{e}^{\,i(E_f^{(0)}-E_i^{(0)})t'/\hbar}dt'$$

と表される。ここで，$|\,i\,\rangle$ と $E_i^{(0)}$ および $|\,f\,\rangle$ と $E_f^{(0)}$ はそれぞれ無摂動系の固有関数とエネルギー固有値である。

(4) 摂動ハミルトニアンとして $\hat{V}(t) = e\mathcal{E}(t)z$ とすることができる。このとき，電子に作用する力を求めよ。

(5) $\langle 2,0,0|\hat{V}(t)|1,0,0\rangle$, $\langle 2,1,0|\hat{V}(t)|1,0,0\rangle$, $\langle 2,1,\pm1|\hat{V}(t)|1,0,0\rangle$ において，$\hat{V}(t)$ が z の奇関数であることに着目すると，これらの行列要素の中で 0 にならないものを判別できる。その行列要素を記し，計算せよ。三次元極座標では $z = r\cos\theta$ となることに注意せよ。

(6) 基底状態の水素原子が，十分長い時間の後に第一励起状態に遷移する確率 $\left|C_{f,i}^{(1)}(\infty)\right|^2$ を求めよ。なお，中心力場内の運動ではエネルギー固有値は n のみに依存し，水素原子の第一励起状態のエネルギー固有値は $-\hbar^2/8m{a_0}^2$ である。

２０２３年１０月入学，２０２４年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科　博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

はじめに，室温にあるヘリウム (^{4}He) について理解するため，体積 V の容器に閉じ込められた３次元理想気体 (粒子数 N) を，古典統計力学の近似に基づいて考察する。この理想気体の１粒子状態のエネルギーは，粒子の質量を m，運動量を $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ として，$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$ で与えられる。

以下の問いに答えよ。ただし，T を絶対温度，k_{B} をボルツマン定数，h をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$ とする。必要であれば，次の積分公式を用いても良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(1) カノニカル分布の考え方に基づき，温度 T で熱平衡にある系の分配関数を Z とすると，エネルギー期待値が次式で得られることを示せ。ただし，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ である。

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \qquad \text{(i)}$$

(2) この理想気体 (体積 V, 温度 T, 粒子数 N) の 分配関数 Z を求めよ。

(3) この理想気体 (体積 V, 温度 T, 粒子数 N) のエネルギー期待値 $\langle E \rangle$ を計算せよ。

次に，極低温にあるヘリウム (^{4}He) について理解するため，スピンがゼロの３次元理想ボーズ気体のモデルを考える。

(4) 温度 T, 化学ポテンシャル μ のとき，１粒子エネルギー ε で指定される状態の平均粒子数 (ボーズ分布関数) $f(\varepsilon)$ の表式を書け。また，１粒子エネルギーが $\varepsilon \geq 0$ を満たすとき，ボーズ分布関数が負にならないために μ が満たすべき条件を書け。

(5) 体積 V の容器に閉じ込められた質量 m の自由粒子の状態密度は，$D(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon}$ となる。このとき，係数 A を求めよ。

(6) 体積 V, 温度 T, 化学ポテンシャル μ のとき，理想ボーズ気体の粒子数 N は，ボーズ分布関数と状態密度から，ある係数 B を用いて次式のようにまとめられる。

$$N = Be^{-\alpha}\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - e^{-\alpha}} \quad \left(\text{ただし}\ \alpha = -\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T}\right) \tag{ii}$$

このとき，係数 B を求めよ。また，関係式 $B = \dfrac{2V}{\sqrt{\pi}\lambda_T^3}$ により定義される λ_T の表式を求めよ。得られた λ_T は，この理想ボーズ気体の熱的ド・ブロイ波長に一致する。

(7) 十分に低温では，式 (ii) の積分は $1.306\sqrt{\pi}$ と近似できることから，次の関係式が得られる。

$$N = \frac{2.612V}{\lambda_T^3}e^{-\alpha} \tag{iii}$$

式 (iii) および λ_T の温度依存性から，ある温度 T_0 以下でボーズ・アインシュタイン凝縮が生じることがわかる。温度 T_0 における熱的ド・ブロイ波長 λ_{T_0} を N, V で表せ。

(8) 熱的ド・ブロイ波長は，$k_\mathrm{B}T$ の運動エネルギーをもつ量子力学的粒子の波長としての意味をもつ。この点に着目し，かつ平均粒子間距離 $a = (V/N)^{1/3}$ を用いて，ボーズ・アインシュタイン凝縮について述べよ。