応用数学問題
(数理モデル解析学，現象数値解析学 教育研究分野志願者)

第 1 問〜第 3 問のすべてに解答しなさい。

第 1 問 応用数学

以下の各問に答えなさい。

問 1 関数 $y = \sin 2x$ は $-\pi/4 < x < \pi/4$ の範囲で連続かつ微分が正となるので，$-1 < y < 1$ の範囲で微分可能な逆関数が定義できる。この逆関数の微分を求めなさい。

問 2 関数 $f(x) = \log(x+1)$ の $x = 0$ における有限テイラー展開を x^2 の項まで求めなさい。剰余項は R_3 で表しなさい。

問 3 a を正の定数とする。xy 平面内の領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

で定義する。$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ を求めなさい。

第 2 問 応用数学

s を実数とし, ベクトル $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ を

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ s \end{pmatrix}$$

とおく。また, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ を並べて得られる 4 次正方行列を

$$P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$$

とおく。以下の各問に答えなさい。

問 1 P が正則となるための s の条件を求めなさい。

問 2 斉次線形方程式 $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解 $\mathbf{x}$ を求めなさい。ただし, $\mathbf{0}$ は 4 次の零ベクトルである。

問 3 $s = 3$ とする。このとき,

$$\sum_{i=1}^{4} a_i \mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

をみたす a_1, a_2, a_3, a_4 の値を求めなさい。

問 4 $s = 2$ とする。このとき, P の定める線形写像 f の像

$$\operatorname{Im} f = \{P\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$$

の基底を 1 組求めなさい。

第 3 問 応用数学

以下の各問に答えなさい。ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする。

問 1 微分方程式

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \tag{1}$$

を考える。$z = y/x$ とおき，$z(x)$ についての微分方程式を導きなさい。それを用いて (1) の解を求めなさい。

問 2 微分方程式

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

の解で，条件

$$y(0) = 2, \quad \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$$

をみたすものを求めなさい。

問 3 微分方程式

$$y'' + y' + y = 0$$

の実数値関数としての一般解を求めなさい。