

2024年4月入学

大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 数理科学コース

試験問題 <一般入試>

専 門 科 目

数 学

注意事項

- 1 解答はじめの合図があるまでは、注意事項を読むだけで、問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。
- 2 問題冊子は1冊、解答用紙は5枚、下書き用紙は3枚です。
- 3 すべての解答用紙に受験番号を記入してください。
- 4 各問題の解答は、それぞれ指定された解答用紙に記入してください。
- 5 解答用紙のホッチキスは、外さないでください。
- 6 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

2024年4月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 数理科学コース
試験問題 <一般入試>

【試験科目：専門科目（数学）】

以下の問題文中の \mathbb{Z} , \mathbb{R} は、すべての整数からなる集合、すべての実数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

第1問

a, b, c は実数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

と定義する。このとき

$$\det A = (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$$

を示せ。ただし、 $\omega \neq 1$ は $\omega^3 = 1$ をみたす複素数とする。

- (2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する。このとき、 B の固有値をすべて求めよ。

- (3) (2) で定義した B は複素行列によって対角化可能か否かを理由をつけて述べよ。

第2問

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を $f(x) = \arctan x$ と定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $(1+x^2)f'(x)$ を計算せよ。
(2) 非負の整数 n に対して、 $f^{(n+2)}(x)$ を $f^{(n+1)}(x)$ と $f^{(n)}(x)$ を用いて表せ。
(3) 非負の整数 n に対して、 $f^{(n)}(0)$ の値を求めよ。

第3問

a, b, c は実数とする。

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

とおく。このとき、積分

$$\iiint_D (ax^2 + by^2 + cz^2) dx dy dz$$

を求めよ。

第4問

A を有限生成自由アーベル群(有限生成自由 \mathbb{Z} 加群)とし、 $f: A \rightarrow A$ を準同型写像とする。以下の命題それぞれについて正しければ証明し、正しくなければ反例を挙げよ。

- (1) f の像が有限アーベル群ならば、 f はゼロ写像である。
- (2) f が単射ならば、 f は同型写像である。
- (3) f が全射ならば、 f は同型写像である。

第5問

(X, d_X) を距離空間とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $U \subset X$ が連結であることの定義を述べよ。
- (2) 距離空間 $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ の部分集合 $[0, 1]$ が連結であることを上の定義から示せ。ここで、 $d_{\mathbb{R}}$ はユークリッド距離とする。
- (3) X の連結な部分集合の族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を考える。 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は連結であることを示せ。
- (4) (Y, d_Y) を距離空間とし、 $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。 $U \subset X$ が連結ならば、 $f(U) \subset Y$ も連結であることを示せ。