２０２４年４月入学

大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 物理科学コース

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２４年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

図１に示すように，水平台の上に質量mの２個のおもりが，３個のばね（ばね定数k）で接続されている。左側のバネの左端と右側のバネの右端は壁に固定されている。おもりの平衡位置からの右方向のずれをそれぞれx_1, x_2とする。以下の問いに答えよ。

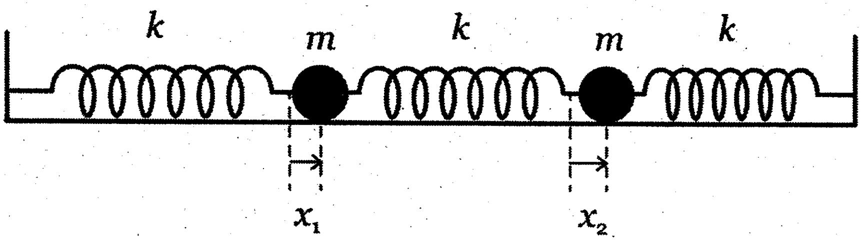

図１

(1) この系の運動エネルギーを求めよ。
(2) この系のポテンシャルエネルギーを求めよ。ただし，ポテンシャルエネルギーの基準は$x_1 = x_2 = 0$のときとする。
(3) 問(1)の運動エネルギーと問(2)のポテンシャルエネルギーから，この系のラグランジアンを求めよ。
(4) この系におけるラグランジュの運動方程式を求めよ。
(5) 問(4)の運動方程式を解いて，この系の基準振動の固有角振動数を求めよ。
(6) 左側のおもりを距離aだけ右に（$x_1 = a$），右側のおもりを距離aだけ左に（$x_2 = -a$）ずらしてから静かにおもりを離す。このときのx_1とx_2の時間変化を求めよ。

２０２４年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

外側の円筒導体（半径 b）と，内側の円柱導体（半径 a）からなる長い同軸線がある。同軸線の一方に電源（電圧 V_0），他端に負荷の抵抗がつながれており，一定の電流 I_0 が流れている。円筒導体と円柱導体の隙間は真空であり，導体の抵抗はゼロとする。真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0とする。以下の問いに答えよ。

(1) 円柱導体と円筒導体の線電荷密度を λ および $-\lambda$ とするとき，導体間の隙間 $(a < r < b)$および外側 $(r > b)$ に生じる電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさを求めよ。
(2) λ を求めよ。
(3) 導体間の隙間 $(a < r < b)$ および外側 $(r > b)$ に生じる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさを求めよ。
(4) (1)と(3)で求めた磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の向きを図示せよ。
(5) 導体間の隙間 $(a < r < b)$ に蓄えられる単位長さ当たりの電磁場のエネルギーを求めよ。
(6) 導体間の単位長さあたりの静電容量 C と，インダクタンス L を求めよ。

次に，同軸線に交流電源をつなげると，(1)と(3)で求めた磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ も時間変化する。同軸線を伝わる電磁波について，以下の問いに答えよ。

(7) 真空中のマクスウェル方程式を書き，その物理的意味を説明せよ。
(8) マクスウェル方程式を用いて電磁場の波動方程式を導出せよ。必要であれば，恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ を用いてよい。
(9) 同軸線を伝わる電磁波の伝搬速度を求めよ。また，導体間の隙間を誘電率 ε $(> \varepsilon_0)$および透磁率 μ $(> \mu_0)$の絶縁体で満たすと，電磁波の伝搬速度はどう変わるか答えよ。

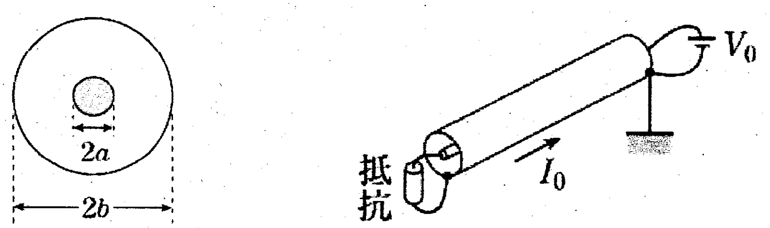

図２

２０２４年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第３問

１次元井戸型ポテンシャル中で運動する粒子について考える。ポテンシャルを

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ \infty & (x < 0,\ x > L) \end{cases}$$

と設定する。粒子の質量を m，プランク定数を $h\,(= 2\pi\hbar)$ として，以下の問いに答えよ。

(1) 定常状態において，粒子の波動関数を $\psi(x)$，エネルギー固有値を E としたとき，シュレディンガー方程式を記せ。
(2) このシュレディンガー方程式の一般解を求めよ。
(3) 境界条件により，エネルギー固有値 E_n を求めよ。ここで，n は量子数である。
(4) 規格化条件により，波動関数 $\psi_n(x)$ を求めよ。
(5) 得られた波動関数 $\psi_n(x)$ が規格直交関係を満たすことを示せ。
(6) 粒子の位置の期待値 $\langle x \rangle$ が量子数 n によらず $L/2$ となることを示せ。

次に，この粒子の状態の時間変化を考える。このとき任意の波動関数 $\Psi(x,t)$ は，上で求めた定常状態の波動関数 $\psi_n(x)$ およびエネルギー固有値 E_n を用いて，

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t/\hbar}$$

と表すことができる。ここで，係数 c_n は確率振幅と呼ばれる。

(7) $t = 0$ における波動関数が，

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{L}} \sin \dfrac{2\pi}{L} x & (0 < x \le L/2) \\ 0 & (L/2 < x < L) \end{cases}$$

と与えられたとき，$t > 0$ の波動関数 $\Psi(x,t)$ を求めよ。
(8) 時刻 $t (> 0)$ において，この粒子が基底状態にあることを見出す確率を求めよ。

2024年 4月入学
大学院環境生命自然科学研究科　博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学)】

第4問

3次元理想フェルミ気体 (質量 m，スピン 1/2) のモデルを考える。以下の問いに答えよ。ただし，T を絶対温度，k_{B} をボルツマン定数，h をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$ とする。

はじめに，$T=0$ の理想フェルミ気体について考える。

(1) フェルミエネルギーを ε_F とする。$T=0$ におけるフェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ を，エネルギー ε の関数として図示せよ。

(2) この理想フェルミ気体の1粒子状態のエネルギーは，波数ベクトルを $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$ として，

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)$$

で与えられる。系の体積を V とするとき，系の状態密度は $D(\varepsilon)=A\sqrt{\varepsilon}$ となる。係数 A を求めよ。

(3) この理想フェルミ気体の全粒子数 N を，フェルミエネルギー ε_F を用いて計算すると，定数 a を用いて次のようにまとめられる。

$$N = a\,D(\varepsilon_F)\varepsilon_F$$

定数 a を求めよ。

(4) この理想フェルミ気体の $T=0$ におけるエネルギー E_0 を計算すると，定数 b を用いて次のようにまとめられる。

$$E_0 = b\,D(\varepsilon_F)\varepsilon_F^2$$

定数 b を求めよ。

次に，低温における理想フェルミ気体の比熱について考える。ただし，以下の (6), (7), (8) については，結果の導出について丁寧に説明を与えること。

(5) 有限温度 T (ただし $k_{\mathrm{B}}T \ll \varepsilon_F$) におけるフェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ を，エネルギー ε の関数として図示せよ。この際，$f(\varepsilon)$ が変化するエネルギー幅 $\Delta\varepsilon$ が熱エネルギー $k_{\mathrm{B}}T$ とどのように関係しているのかも答え，かつ，その関係を図中に記入すること。

(6) 有限温度 T (ただし $k_{\mathrm{B}}T \ll \varepsilon_F$) では，熱励起されるフェルミ粒子の個数 N_{exc} は，(5) で答えた $\Delta\varepsilon$ を用いて近似的に以下のように与えられる。

$$N_{\mathrm{exc}} \approx D(\varepsilon_F) \times (\Delta\varepsilon)^{\ell}$$

正しい指数 ℓ の値を使い，かつ上記 (5) で考察した $\Delta\varepsilon$ と $k_{\mathrm{B}}T$ の関係式により $\Delta\varepsilon$ を消去し，N_{exc} の近似式を求めよ。

(7) 有限温度 T (ただし $k_{\mathrm{B}}T \ll \varepsilon_F$) において，熱励起されるフェルミ粒子 1 個あたりのエネルギーの増加分（フェルミエネルギーから測った励起エネルギー）がおよそどの程度になるのかを考えると，上記 (6) の結果と併せて，有限温度におけるエネルギー $E(T)$ は近似的に以下のように与えられる。

$$E(T) \approx E_0 + D(\varepsilon_F) \times (\Delta\varepsilon)^m$$

正しい指数 m の値を使い，かつ上記 (5) で考察した $\Delta\varepsilon$ と $k_{\mathrm{B}}T$ の関係式により $\Delta\varepsilon$ を消去し，$E(T)$ の近似式を求めよ。

(8) 最後に，上記 (7) の結果を用いると，比熱 $C(T)$ の近似式が係数 γ を用いて次のように求まる。

$$C(T) \approx \gamma T^n$$

指数 n と 係数 γ を答えよ。