２０２５年４月入学

岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程

数理科学コース

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

数　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は５枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ別の解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２５年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科　博士前期課程　数理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学)】

問題は全部で７問ある。A 系統（[A-1]〜[A-4]）から３題を選択, B 系統（[B-1]〜[B-3]）からは２題を選択して, 計５題について解答せよ。ただし, 以下の問題文中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は, すべての整数からなる集合, すべての有理数からなる集合, すべての実数からなる集合, すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1] a を複素数とする。次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 & -a \\ a & 1 & -a & 1 \\ -1 & a & 1 & a \\ a & 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) A の固有多項式を求め，さらに 0 が固有値であることも示せ。

(2) 固有値 0 に属する A の固有空間の次元が 2 となるような a の必要十分条件を求めよ。

(3) a が (2) の条件をみたすとき，A が複素行列によって対角化可能か否かを理由をつけて述べよ。

[A-2] A を n 次の実正方行列とし，${}^tA$ をその転置行列とする。

$$B = {}^tAA$$

とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) B は対称行列であることを示せ。

(2) 任意の $v \in \mathbb{C}^n$ に対して, (Bv, v) は 0 以上の実数であることを示せ。ここで $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{C}^n$ の標準内積である。

(3) B の固有値は 0 以上の実数であることを示せ。

(4) $X^2 = B$ となる実正方行列 X が存在することを示せ。

[A-3] 関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続で，$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ と仮定する。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) f は $[0,\infty)$ 上で有界であることを示せ。

(2) すべての $t>0$ に対して，広義積分 $\int_0^\infty e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ が収束することを示せ。

(3)

$$\lim_{t\to+0} t\int_0^\infty e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

が成り立つことを示せ。

[A-4] 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理関数 f を

$$f(z)=\frac{1}{z^4+z^2+1}$$

で定める。また，$R>1$ に対して，線分 $L_R=[-R,R]$ と半円 $C_R=\{Re^{i\theta}\mid 0\leq\theta\leq\pi\}$ からなる閉曲線 $L_R\cup C_R$ を正の向きに一周する経路を Γ_R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 上半平面 $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ における $f(z)$ の特異点とその留数をすべて求めよ。

(2) 複素積分 $\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z$ を求めよ。

(3) 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$ を求めよ。

【B 系統】

[B-1] R は 2 個以上の元からなる，乗法単位元 1 をもつ可換環とする。 また，$M \neq R$ をそのイデアルとする。環は極大イデアルがひとつしかないとき局所環という。以下の問いに答えよ。

(1) R/M が体となるとき M は R の素イデアルであることを示せ。

(2) $R \setminus M$ の任意の元が R の単元となるとき，R は M を極大イデアルとする局所環であることを示せ。

(3) M を R の極大イデアルとする。$\{1+m \mid m \in M\}$ の任意の元が R の単元となるとき，R は M を極大イデアルとする局所環であることを示せ。

[B-2] 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0,\ -1 < y < 1\} \end{aligned}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) A は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ。

(2) B は $\mathbb{R}^2$ の開集合でも閉集合でもないことを示せ。

(3) A と B を $\mathbb{R}^2$ からの相対位相により位相空間とみなしたとき，A と B は同相であることを示せ。

[B-3] f を $\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数とし，$D = \left\{(x, y) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2 \,\middle|\, x + y \geq 0\right\}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t$ を示せ。

(2) 線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} f(x+y)\mathrm{d}y$ に対して，以下の等式を示せ。

$$\int_{\partial D} f(x+y)\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-t)f'(t)\mathrm{d}t$$

ただし ∂D は D の境界であり，積分経路は ∂D の正の向きにとるものとする。