２０２５年４月入学

岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程

物理科学コース

試験問題　<一般入試>

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２５年４月入学

岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程

物理科学コース

試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

図１のように，半径 a の円型の滑車がある。この滑車は，その中心軸が水平で回転しない状態で固定されている。この滑車に軽くて伸びない糸をかけ，その両端に質量がそれぞれ m と M の小物体 A と B をつける。ここで，$M > m$ とする。はじめに小物体 A を手で支えており，時刻 $t = 0$ で静かに手を放すと，糸は滑車をなめらかにすべり，小物体 A と B は鉛直方向に運動をはじめた。空気抵抗は無視できるものとし，重力加速度を g とする。次の問いに答えよ。

(1) 小物体 A の加速度の大きさを求めよ。

(2) 手を放してから，小物体 A が距離 h だけ上昇するのに要する時間を求めよ。ただし，この間小物体は滑車に接触しないものとする。

(3) 小物体 A が運動しているときの糸の張力を求めよ。

次に，この滑車を中心軸まわりで回転する同型の滑車に置き換えた。このとき，糸は滑車に対してすべらず，滑車が糸とともに回るものとする。滑車の重心は回転軸にあり，その慣性モーメントを I とする。はじめに小物体 A を手で支えており，時刻 $t = 0$ で静かに手を放したところ，小物体 A と B は鉛直方向に運動をはじめ，同時に滑車は回転しはじめた。ただし，糸の長さは十分長く，小物体は滑車に接触していないものとする。

(4) 手を放してから小物体 A が上昇した距離を x，滑車の回転角度を θ とするとき，x と θ の関係を示せ。

(5) 小物体 A，B と滑車のそれぞれの運動エネルギーと位置エネルギーを求め，ラグランジアンを求めよ。

(6) 距離 x に関するラグランジュ方程式より，小物体 A の加速度を求めよ。

(7) 回転している滑車に作用する力のモーメントの大きさを求めよ。

(8) 滑車が回転しはじめてから一周するのに要する時間を求めよ。

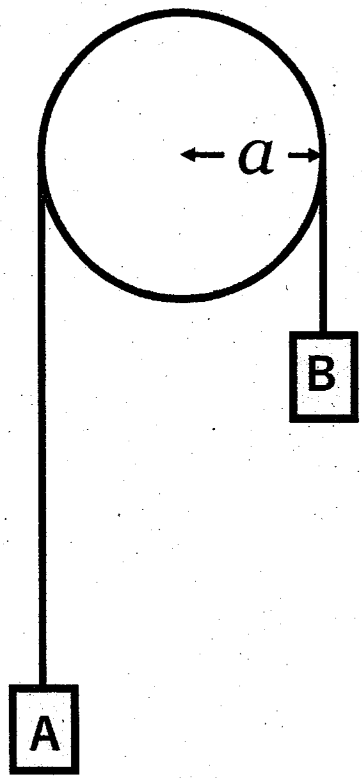

図 1

２０２５年４月入学

岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程

物理科学コース

試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

真空中の電気双極子について考える。真空の誘電率を ε_0 とする。$(x,y,z) = (0,0,\frac{d}{2})$ に $+q\ (q>0)$ の正電荷，$(x,y,z) = (0,0,-\frac{d}{2})$ に $-q$ の負電荷を固定する。以下の問いに答えよ。ただし，無限遠での静電ポテンシャルをゼロとする。

(1) 位置 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ における静電ポテンシャルを求めよ。

(2) $r \gg d\ (r = |\boldsymbol{r}|)$ のとき，二つの電荷は電気双極子とみなせる。電気双極子による静電ポテンシャルを求めよ。

(3) 電気双極子モーメント $p = qd$ を大きさにもち，負電荷から正電荷へ向かうベクトル $\boldsymbol{p}$ を電気双極子モーメントベクトルと定義すると，電気双極子による電場が次式で表されることを示せ。

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}r^2}{r^5}\right]$$

(4) 自然界には，永久電気双極子モーメントをもつ物質が存在する。例を挙げよ。

次に，真空中の磁気双極子について考える。真空の透磁率を μ_0 とする。図２のように，xy 平面上に定常電流 I が流れる半径 a の円形回路を，その中心が原点 O となるように置く。

(5) 回路の微小部分 $d\boldsymbol{l}$（大きさ dl）と，その位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$（方位角 φ）をそれぞれ a，φ を用いて表せ。

(6) xz 平面上で，z 軸からの角 θ にある点 P（位置ベクトル $\boldsymbol{r}$）を考える。$d\boldsymbol{l}$ による点 P の磁束密度 $d\boldsymbol{B}$ をビオ・サバールの法則より求めよ。

(7) 回路が囲む面積 S と z 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ を用いて，磁気双極子モーメントベクトル $\boldsymbol{m} = SI\boldsymbol{k}$ を定義すると，回路から十分遠方（$r \gg a$）の磁束密度が，次式で表されることを示せ。

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{m}r^2}{r^5}\right]$$

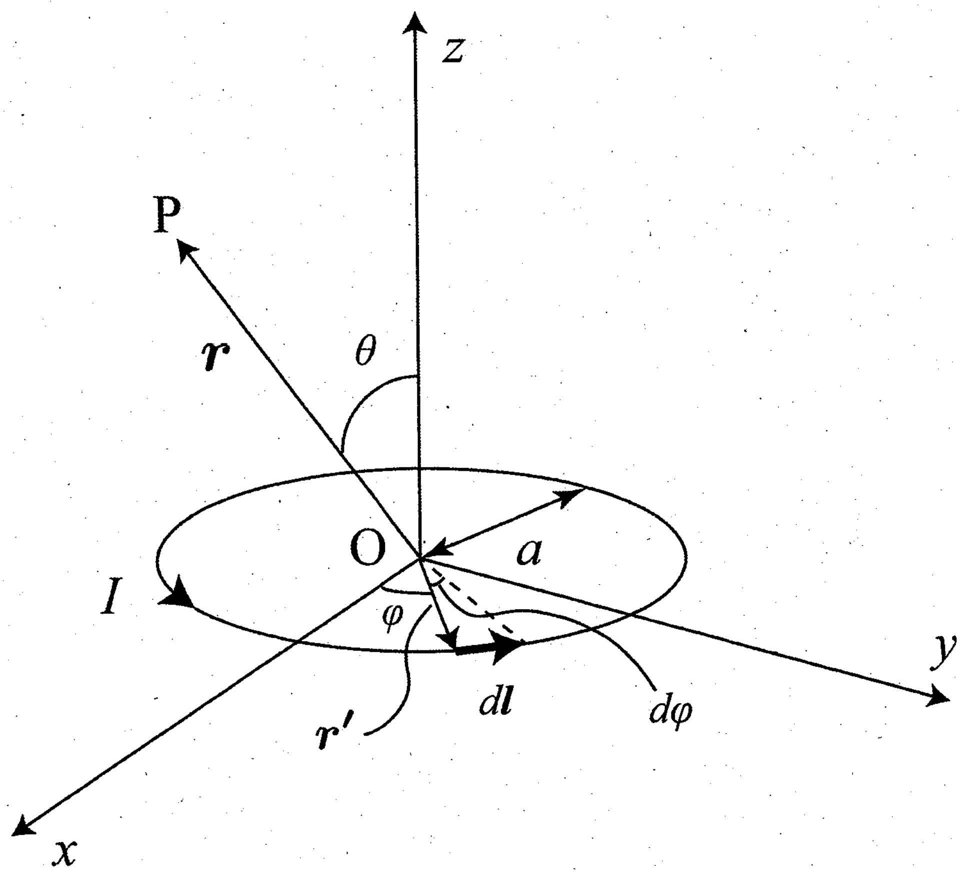

図 2

２０２５年４月入学
岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程
物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第３問

水素原子における電子の波動関数 $\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$ は，極座標 $\boldsymbol{r}=(r,\theta,\phi)$ において次のように表される。

$$\psi_{1S0}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_B}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{r}{a_B}\right) \tag{i}$$

$$\psi_{2S0}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}(A+Br)\exp\left(-\frac{r}{2a_B}\right) \tag{ii}$$

$$\psi_{2P0}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a_B}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{r}{a_B}\exp\left(-\frac{r}{2a_B}\right)\cos\theta \tag{iii}$$

ここで，n,l,m はそれぞれ主量子数，軌道角運動量量子数，磁気量子数であり，a_B はボーア半径である。記号 S,P はそれぞれ $l=0,1$ に対応する。また，A,B は定数である。以下の問いに答えよ。なお，必要に応じて次の公式は既知として使っても良い。

$$\int_0^\infty \rho^k\exp(-\alpha\rho)d\rho=\frac{k!}{\alpha^{k+1}} \tag{iv}$$

ここで，k は正の整数，α は正の実数である。

(1) 波動関数 ψ_{2S0} の規格化の条件と，ψ_{1S0} と ψ_{2S0} が直交する条件を用いて，(ii)式の定数 A,B を求めよ。

水素原子に z 軸方向の静電場 $\mathcal{E}$ をかけると，摂動ハミルトニアンは $H'(\boldsymbol{r})=e\mathcal{E}z=e\mathcal{E}r\cos\theta$ となる。ここで，e は電気素量である。状態 ψ にある水素原子について，外部電場による一次の摂動エネルギーシフト ΔE および電子の位置座標 z の期待値は，それぞれ次の式で求められる。

$$\Delta E=\int d\boldsymbol{r}\,\psi^*(\boldsymbol{r})\,H'(\boldsymbol{r})\,\psi(\boldsymbol{r}) \tag{v}$$

$$\langle z\rangle=\int d\boldsymbol{r}\,\psi^*(\boldsymbol{r})\,z\,\psi(\boldsymbol{r}) \tag{vi}$$

ここで，$\int d\boldsymbol{r}$ は3次元の全空間に渡る積分である。

(2) 状態 $\psi_a=\psi_{2P0}$ にある水素原子に z 軸方向の静電場をかけた場合のエネルギーシフト ΔE_a と電子の位置座標の期待値 $\langle z\rangle_a$ を求めよ。なお，摂動ハミルト

ニアン $H'(\boldsymbol{r})$ と波動関数のパリティに注意すること。

(3) $\psi_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{2S0} + \psi_{2P0})$ という重ね合わせ状態にある水素原子に z 軸方向の静電場をかける。この場合のエネルギーシフト ΔE_b と電子の位置座標の期待値 $\langle z\rangle_b$ を求めよ。

(4) 問(2)と問(3)の結果を用いて，状態 ψ_a と ψ_b はそれぞれ電気双極子モーメントをもっているかどうかを議論せよ。

1947年，ラムとレザフォードによる精密実験により，水素原子の $2S$ 準位と $2P$ 準位の間にわずかなエネルギーの分裂があることが発見された（ラムシフト）。これは当時知られていたディラックの相対論的量子論では説明できない現象だったため，新たな理論の構築が求められた。ベーテはクラマースが提唱した質量繰り込みの概念をラムシフトの問題に適用することで，エネルギーシフトが次の式の定数倍として求められることを示した。

$$\lambda = \frac{e^2}{\varepsilon_0}\int d\boldsymbol{r}\, \psi^*(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) \tag{vii}$$

ここで，ε_0 は真空の誘電率，$\delta(\boldsymbol{r})$ はディラックのデルタ関数である。

(5) 状態 ψ_{2S0} および状態 ψ_{2P0} のそれぞれについて，(vii) 式から λ を求めよ。

２０２５年４月入学
岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程
物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

閉じた空間において熱平衡状態にある電磁場について考える。境界の影響を無視し，電磁場の固有振動が波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ をもつ進行波として表されるとする。このとき，量子化された電磁場の固有振動のエネルギー $E_{\boldsymbol{k}}$ は

$$E_{\boldsymbol{k}} = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\left(n_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\right)$$

で与えられる。ここで，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った定数，$n_{\boldsymbol{k}}$ は 0 以上の整数をとる量子数である。$\omega_{\boldsymbol{k}}$ は角振動数で，分散関係は光速 c を用いて $\omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}|$ で与えられる。電磁場を温度 T の熱浴に接するカノニカル集団として扱う。ボルツマン定数を k_{B} として，以下の問いに答えよ。

(1) 分配関数 Z は

$$Z = \left(\prod_{\boldsymbol{k}} z_{\boldsymbol{k}}\right)^2$$

のように，各波数における寄与 $z_{\boldsymbol{k}}$ の積で表される。二乗は，電磁波が横波の偏光の自由度 2 をもつことによる。$z_{\boldsymbol{k}}$ を求めよ。

(2) 電磁場の固有振動のエネルギー $E_{\boldsymbol{k}}$ の熱平均値 $\langle E_{\boldsymbol{k}}\rangle$ を求めよ。

(3) 量子数 $n_{\boldsymbol{k}}$ の熱平均値 $\langle n_{\boldsymbol{k}}\rangle$ を求めよ。

(4) 問(2)および問(3)の結果を用いて，電磁場が化学ポテンシャル $\mu = 0$ のボーズ粒子の集まりとみなせることを説明せよ。

続いて，体積 V の立方体の箱の中で熱平衡状態にある電磁場について考える。

(5) 角振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間にある電磁場の固有振動の総数を $D(\omega)d\omega$ と表すとき，状態密度 $D(\omega)$ を求めよ。横波の偏光の自由度 2 に注意すること。

(6) ゼロ点振動の寄与を除く電磁場の全エネルギー $E = 2\sum_{\boldsymbol{k}}\langle E_{\boldsymbol{k}} - \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}/2\rangle$ を

$$E = \int_0^\infty d\omega\, u(\omega)$$

と表すとき，エネルギー密度 $u(\omega)$ を求めよ。

(7) $\hbar\omega \ll k_B T$ における $u(\omega)$ を求め，その式が表す物理的意味を説明せよ。

(8) $\hbar\omega \gg k_B T$ における $u(\omega)$ を求め，その式が表す物理的意味を説明せよ。