２０２５年４月入学第２回一般入試

岡山大学大学院環境生命自然科学研究科

（博士前期課程）

数理情報科学学位プログラム 数理データ科学コース

入学試験問題

専門科目

注意

１． 専門科目は，志望する教育研究分野の指定する科目を解答しなさい。教育研究分野の指定する科目は，下記の通りです。指定された科目以外の科目を解答すると無効となります。

コース	教育研究分野	科目名
数理データ科学	数理モデル解析学	応用数学
	現象数値解析学	
	統計データ解析学	統計学
	時空間統計学	
	計算機統計学	

２． 専門科目の解答用紙には，解答する科目名および問題番号を記入しなさい。

３． 各専門科目の問題の冒頭に，解答する問題の選択に関する指示がありますから，試験開始後必ず読みなさい。指示された問題選択以外の方法で解答すると無効となります。

応用数学問題
（数理モデル解析学，現象数値解析学 教育研究分野志願者）

第１問～第３問を解答しなさい。

第１問 応用数学（基礎数学）

以下の各問に答えなさい。

問１ 次の関数の極限値を求めなさい。

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^4}$

問２ 次の関数の極値を求めなさい。

$$f(x,y)=x^4+y^2+2x^2-4xy+1$$

問３ 閉領域 D を

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$$

とするとき，次の積分の値を求めなさい。

$$\iint_D (x^2y+y^2)\,dxdy$$

第 2 問 応用数学（基礎数学）

以下の各問に答えなさい。

問 1 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 L を次で定める。

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,;\, x + y - z = 0 \right\}$$

このとき，以下の各問に答えなさい。

(i) L は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示しなさい。

(ii) 部分ベクトル空間 L の基底を一組求めなさい。

問 2 次の行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

行列 A は対角化可能か否か答えなさい。対角化可能な場合は，$P^{-1}AP$ が対角行列となる行列 P および $P^{-1}AP$ を求めなさい。

第3問 応用数学

以下の各問に答えなさい。

問1 $y(x)$ についての微分方程式

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

を解きなさい。

問2 $y(x)$ についての微分方程式

$$y'' + 3y' + 2y = e^x$$

の一般解を求めなさい。

問3 α を定数とし，$y(x)$ についての微分方程式

$$y'' + y' = \alpha$$

を考える。以下の各問に答えなさい。

(i) $\alpha = 0$ のとき，一般解を求めなさい。

(ii) $\alpha \neq 0$ のとき，一般解を求めなさい。

統計学問題

（統計データ解析学, 時空間統計学, 計算機統計学 教育研究分野志願者）

第1問～第4問より，いずれか3問を選択し解答しなさい。

第1問　統計学

確率変数 X は平均 μ_x，分散 $\sigma_x^2\ (>0)$ の正規分布に従い，確率変数 Y は平均 μ_y，分散 $\sigma_y^2\ (>0)$ の正規分布に従うとする。さらに，X と Y は互いに独立であるとする。次の問1～問3に答えよ。

問1　標準正規分布に従う確率変数 Z の積率（モーメント）母関数

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi(z)\,dz \quad (-\infty < t < \infty)$$

を求めよ。ただし，$\varphi(z)$ は標準正規分布の確率密度関数

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \quad (-\infty < z < \infty)$$

である。

問2　$X = \mu_x + \sigma_x Z$ と表されることを利用して，X の積率母関数

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \quad (-\infty < t < \infty)$$

を求めよ。

問3　定数 a, b に対して，$aX + bY$ の積率母関数

$$M_{aX+bY}(t) = E\{e^{t(aX+bY)}\} \quad (-\infty < t < \infty)$$

を求めよ。さらに，$aX + bY$ はどのような分布に従うか答えよ。

第2問　統計学

繰り返しのある二元配置法を考える。要因 A, B はそれぞれ a 個の水準 $A_1, A_2, \ldots, A_a$ および b 個の水準 $B_1, B_2, \ldots, B_b$ からなるとする。また，各水準における観測の繰り返し数を r とする。ここに，a, b, r はともに2以上の整数である。いま，各水準の組み合わせ (A_i, B_j) に対して X_{ijk} が以下の式に従って観測されたとする。

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (i = 1, 2, \ldots, a;\ j = 1, 2, \ldots, b;\ k = 1, 2, \ldots, r)$$

ただし，$\mu, \alpha_i, \beta_j, \gamma_{ij}$ は定数とし，$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0,\ \sum_{i=1}^{a} \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{b} \gamma_{ij} = 0$ の関係が成り立つ。また，$\varepsilon_{ijk} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$ であり，γ_{ij} は A と B の交互作用効果 $(A \times B)$ を表している。

さらに，$\bar{X}_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{br}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} X_{ijk} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \bar{X}_{ij\cdot}$，　$\bar{X}_{\cdot j\cdot} = \frac{1}{ar}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} X_{ijk} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} \bar{X}_{ij\cdot}$，

$\bar{X}_{ij\cdot} = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} X_{ijk}$，　$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{abr}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} X_{ijk} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} \bar{X}_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \bar{X}_{\cdot j\cdot}$

の関係が成り立つ。次の問1〜問4に答えよ。

問1　総平方和を $S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} (X_{ijk} - \bar{\bar{X}})^2$，

AB 間平方和を $S_{AB} = r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\bar{X}_{ij\cdot} - \bar{\bar{X}})^2$，

誤差平方和を $S_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} (X_{ijk} - \bar{X}_{ij\cdot})^2$ とするとき，

$S_T = S_{AB} + S_E$ が成り立つことを示せ。

問2　A 間平方和を $S_A = br\sum_{i=1}^{a} (\bar{X}_{i\cdot\cdot} - \bar{\bar{X}})^2$，

B 間平方和を $S_B = ar\sum_{j=1}^{b} (\bar{X}_{\cdot j\cdot} - \bar{\bar{X}})^2$，

$A \times B$ 平方和を $S_{A\times B} = r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\bar{X}_{ij\cdot} - \bar{X}_{i\cdot\cdot} - \bar{X}_{\cdot j\cdot} + \bar{\bar{X}})^2$ とするとき，

問1で定義した S_{AB} に対して $S_{AB} = S_A + S_B + S_{A\times B}$ が成り立つことを示せ。

(第2問は次のページに続く)

問3　ある化学製品メーカーでは新たに開発している反応生成物の濃度を高めるため，2つの要因として触媒の種類 A（2水準），反応温度 B（4水準）を取り上げ，各水準の組み合わせで2回ずつ実験を行った。$2 \times 4 \times 2 = 16$ 回の実験はランダムな順序で行い，得られたデータから S_A, S_B, S_E, S_T を計算した。以下の分散分析表を完成させるために，（ア）から（ス）に当てはまる値を求めよ。

変動	平方和	自由度	平均平方	F 比
要因 A	24	(イ)	(キ)	(サ)
要因 B	108	(ウ)	(ク)	(シ)
交互作用 $A \times B$	(ア)	(エ)	(ケ)	(ス)
残差	32	(オ)	(コ)	
計	200	(カ)		

問4　問3の分散分析表に基づき，次の(1)〜(3)について，5%の有意水準で判定せよ。ただし，有意性の判定には F 分布表を利用してよい。

(1) 2つの触媒の種類の間に差が認められるか。

(2) 4つの反応温度の間に差が認められるか。

(3) 触媒の種類と反応温度との間に交互作用効果が認められるか。

F 分布表（分子の自由度 ϕ_1，分母の自由度 ϕ_2 に対する上側確率5%点）

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82

第3問　統計学

以下の確率関数 $f(x;p)$ $(0 < p < 1)$ をもつ幾何分布からの無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が得られているとする。

$$f(x;p) = p(1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

次の問 1〜問 5 に答えよ。

問 1　$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が観測されたとき，対数尤度関数

$$\ell(p; \boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \log f(X_i; p)$$

を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ および n, p の式で表せ。

問 2　問 1 の対数尤度関数 $\ell(p; \boldsymbol{X})$ は p の関数として上に凸であることを示せ。

問 3　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ の標本平均を $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ と書く。
$\bar{X} \neq 0$ のとき，p の最尤推定量 $\hat{p}$ は $\bar{X}$ の式で表されることを示せ。

問 4　対数尤度関数 $\ell(p; \boldsymbol{X})$ に対して，p に関する微分を記号 $'$ で表す。
Fisher 情報量

$$\mathcal{I}_n(p) = E\{-\ell''(p; \boldsymbol{X})\}$$

を n, p の式で表せ。ただし，X_1 の期待値は $E(X_1) = \dfrac{1-p}{p}$ である。

問 5　問 3 の最尤推定量 $\hat{p}$ は，n が大きいとき近似的にどのような分布に従うか述べよ。ただし，「正則条件」が成り立つことは断りなく用いてよい。

第 4 問　統計学

次の問 1〜問 2 に答えよ。

問 1　n 人に対して，2 変量 (X_1, X_2) について得られたデータを

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}$$

とする。

ここで変量 X_1, X_2 の分散はともに 3，変量 X_1, X_2 の共分散は 2 である。このデータに対して分散共分散行列に基づく主成分分析を行う。

次の (1)〜(3) に答えよ。

(1) このデータの分散共分散行列 S を求めよ。

(2) 第 1 主成分の分散を求めよ。

(3) 第 1 主成分を求めよ。ただし，X_1 に対する重み係数は正とする。

問 2　n 人に対して，p 変量 $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ について得られたデータを

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

とし，X の分散共分散行列を S_p とする。X の p 変量それぞれの分散の和と，S_p の固有値の和が等しいことを示せ。解答の際には，使用する記号を適宜導入し定義してよい。