

2025年10月入学，2026年4月入学

大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 数理科学コース

試験問題 <一般入試>

専 門 科 目

数 学

注意事項

- 1 解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。
- 2 問題冊子は1冊，解答用紙は5枚，下書き用紙は3枚です。
- 3 すべての解答用紙に受験番号を記入してください。
- 4 各問題の解答は，問題番号と共に1枚の解答用紙に記入してください。
- 5 解答用紙のホッチキスは，外さないでください。
- 6 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

2025年10月入学, 2026年4月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 数理科学コース
試験問題 <一般入試>

【試験科目：専門科目（数学）】

問題は全部で7問ある。A 系統 ([A-1]~[A-4]) から3題を選択, B 系統 ([B-1]~[B-3]) からは2題を選択して, 計5題について解答せよ。ただし, 以下の問題文中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は, すべての整数からなる集合, すべての有理数からなる集合, すべての実数からなる集合, すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1] a を複素数とする。次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ。

- (1) A の固有方程式が重解をもつ a の値をすべて求めよ。
- (2) A が対角化可能となる a の必要十分条件を求めよ。
- (3) A が対角化可能でないとき, A のジョルダン標準形を求めよ。

[A-2] n を2以上の整数とする。 V を n 次元複素ベクトル空間とし, f を V 上の線形変換で, f と f の合成変換 f^2 が恒等変換となるものとする。 $W_1 = \{v \in V \mid f(v) = v\} \neq \{0\}$, $W_{-1} = \{v \in V \mid f(v) = -v\} \neq \{0\}$ であると仮定する。ただし, 0 は V の零ベクトルである。また, V の基底を一組定め, その基底に関する f の表現行列を A とする。以下の問いに答えよ。

- (1) f は全単射であることを示せ。
- (2) f の固有値は1と-1であることを示せ。
- (3) $V = W_1 \oplus W_{-1}$ であることを示せ。
- (4) A は対角化可能であることを示せ。

[A-3] 以下の問いに答えよ。

(1) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ が収束することを示せ。

(2) 広義積分

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

が収束することを示せ。

(3) 等式

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

が成り立つことを示せ。

[A-4] 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 + \pi^2) \sin z}$$

で定義する。正の整数 n について $a_n = (n + \frac{1}{2})\pi$ で定め、 $a_n \pm \sqrt{-1}a_n$, $-a_n \pm \sqrt{-1}a_n$ を頂点とする正方形の境界を正の向きに一周する経路を C_n とする。以下の問いについて答えよ。

(1) $f(z)$ の特異点における留数を求めよ。

(2) 等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} f(z) dz = 0$$

を示せ。

(3) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k^2 + 1}$ の値を留数定理を用いて求めよ。

【B 系統】

[B-1] 5 次対称群 S_5 の部分群で, 2 つの元 $(123), (45)$ で生成される群を G_1 とし, 3 つの元 $(12), (23), (34)$ で生成される群を G_2 とする。ただし, $(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) G_1 および G_2 の位数をそれぞれ答えよ。なお, 理由は述べなくてもよい。
- (2) G_1 は巡回群であるか否か, 理由とともに答えよ。
- (3) $G_1 \cap G_2$ は G_2 の正規部分群であるか否か, 理由とともに答えよ。
- (4) 環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の単元 (乗法に関する可逆元) 全体からなる乗法群を $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ で表す。 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ が以下の群と同型となるような正の整数 n は存在するか否か, それぞれ理由とともに答えよ。
 - (a) G_1
 - (b) $G_1 \cap G_2$

[B-2] (X, d) を距離空間とする。以下の問いに答えよ。

- (1) X の部分集合 A がコンパクトであることの定義を述べよ。
- (2) X のコンパクト部分集合 A と閉部分集合 B が $B \subset A$ を満たすならば B もコンパクトであることを示せ。
- (3) X のコンパクト部分集合 A は有界かつ閉であることを示せ。
- (4) 一般に距離空間の部分集合が有界かつ閉ならばコンパクトであるといえるか? いえるなら証明し, いえないなら反例を挙げよ。

[B-3] $a > 0$ が与えられたとして

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

とおく。このとき

$$\iint_D (x+y) \log(x^2+y^2) \, dx dy$$

を求めよ。