

2025年10月入学，2026年4月入学

大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 物理科学コース

試験問題 <一般入試>

専門科目 物理学

注意事項

- 1 解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。
- 2 問題冊子は1冊，解答用紙は4枚，下書き用紙は4枚です。
- 3 すべての解答用紙に受験番号を記入してください。
- 4 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。
- 5 解答用紙のホッチキスは，外さないでください。
- 6 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

2025年10月入学, 2026年4月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 物理科学コース
試験問題 <一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第1問

1次元振動子の運動を, Fourier 変換を用いて考えよう。図1のように, ばねの一端が壁に固定されており, もう一端に質量 m の質点を取り付けられた1次元振動子を考える。振動子は水平面上に置かれ, ばねの自然長における質点の位置を原点 O にとる。図のように, そこからの変位を x ととり, 質点には, 変位に比例する復元力 $-m\omega_0^2 x$, および, 速度に比例する抵抗力 $-2m\gamma \dot{x}$ が働く。ここで ω_0 は固有角振動数, γ は減衰係数を表す。以下の各問いに答えよ。

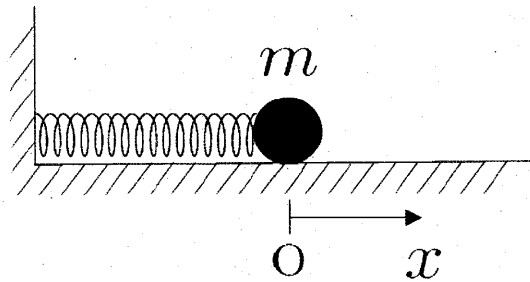


図1

静止状態にあるこの振動子を自然長から Δ だけ押し込み, 時刻 $t = 0$ において静かに解放した場合を考える。

- (1) 振動子の運動方程式を立てよ。
- (2) この運動方程式の時間領域における解を

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{a})$$

のように Fourier 変換を用いて表すものとする。ここで $X(\omega)$ は周波数領域における振動子の Fourier 振幅である。

- (i) $X(\omega)$ が満たすべき方程式を導出せよ。
 - (ii) $X(\omega)$, および式 (a) の物理的な意味を説明せよ。
- (3) 上記の方程式から ω を求めよ。また, $\gamma/\omega_0 > 1$, および $\gamma/\omega_0 < 1$ について, それぞれの場合に対応する $x(t)$ の解を求めよ。
 - (4) $\gamma/\omega_0 > 1$ における $x(t)$ のグラフの概形を図示せよ。同様に, $\gamma/\omega_0 < 1$ における $x(t)$ のグラフの概形を図示せよ。

次に、静止状態にあるこの振動子に、時刻 $t = t'$ で瞬間的な撃力 $f(t) = f_0 \delta(t - t')$ が与えられた場合を考える。ここで $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数を表わし、 $f_0 < 0$ とする。

- (5) この場合の振動子の運動方程式について、時間領域における解を $x(t) = f_0 g(t - t')$ とし、Fourier 変換

$$g(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega \quad (b)$$

を考える。ここで $g(t - t')$ 、および $G(\omega)$ は、時間領域と周波数領域での単一撃力に対する応答関数 (Green 関数) である。 $G(\omega)$ を求めよ。ここで、デルタ関数のフーリエ変換は、

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega \quad (c)$$

である。

- (6) 時間領域での応答 $g(t - t')$ は、式 (b) の複素積分により周波数領域での応答 $G(\omega)$ を時間領域へと変換することで、次式のように求められる。

$$g(t - t') = \frac{1}{m\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma(t-t')} \sin \left[\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} (t - t') \right] \quad (d)$$

式 (d) の $g(t - t')$ が $\gamma/\omega_0 < 1$ における特解であることを示せ。

- (7) $\gamma/\omega_0 < 1$ における $x(t)$ のグラフの概形を図示せよ。

また、前問 (4) における結果との物理的対比を考察し、応答の違いや共通点を論じよ。

以上を踏まえて、この振動子に時間変動する任意の外力 $f(t)$ が働く場合を考える。

- (8) 任意の外力 $f(t)$ をデルタ関数を用いて

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t - t') dt' \quad (e)$$

のように表す。このとき振動子の応答 $x(t)$ は

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t - t') dt' \quad (f)$$

と書けることを論じよ。

- (9) Green 関数は、線形微分方程式により記述される様々な物理学の分野に現れ、Green 関数を求めることが物理現象の記述に重要となる。本問の撃力に対する振動子の応答は、Green 関数の最も基本的な物理モデルの一つである。周波数領域での応答 $G(\omega)$ を求めることの重要性について、式 (b), (e), (f) を参照しつつ考察し、説明せよ。

2025年10月入学, 2026年4月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 物理科学コース
試験問題 <一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第2問

電荷と電流のない空間におけるマクスウェル方程式は以下の4式で与えられる。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{a}) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{c})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{b}) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{d})$$

ここで、 $\vec{E}$ は電場、 $\vec{H}$ は磁場、 $\vec{D}$ は電束密度、 $\vec{B}$ は磁束密度で、いずれも位置 $\vec{r}$ と時間 t の関数である。以下の各問いに答えよ。

- (1) 真空中では $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ である。ここで ϵ_0 は真空の誘電率, μ_0 は真空の透磁率を表す。真空中での電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ の波動方程式をそれぞれ導出せよ。
なお、次の公式を用いて良い。 $\vec{V}$ は任意のベクトルである。

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}$$

- (2) x 方向に速度 v で進む波は任意の関数 $g(x - vt)$ で表される。これを用いて、得られた波動方程式から真空中での電磁波の速度 c を求めよ。
- (3) 問 (1) で得られた波動方程式の平面波解を

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (\text{e}) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (\text{f})$$

とする。ここで $\vec{k}$ は波数ベクトル, $\vec{E}_0$ と $\vec{B}_0$ は位置と時間に依存しない定数ベクトル, ω は角振動数である。 $\vec{k}$ と $\vec{E}_0$ と $\vec{B}_0$ が全て直交することを示し、さらに

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \quad (\text{g})$$

$$\omega = |\vec{k}| c \quad (\text{h})$$

の関係を導出せよ。

- (4) 物質中では $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ となる。ここで ϵ は物質の誘電率, μ は物質の透磁率である。物質中の電磁波の速度 v は真空中より遅くなり、その比率 $n \equiv c/v$ を屈折率とよぶ。物質中の屈折率 n を求めよ。

次に図 2a) のように、物質 1 と物質 2 が $z = 0$ の境界面で接しており、 z 軸方向に電磁波が伝播する状況を考える。物質 1 と 2 はどちらも誘電体とし、物質 1 と物質 2 の誘電率はそれぞれ ϵ_1, ϵ_2 であり、透磁率はいずれも μ_0 で真空と等しいとする。境界面では

1. 電場の境界面に平行な成分は連続
2. 磁場の境界面に平行な成分は連続
3. 電束密度の境界面に垂直な成分は連続
4. 磁束密度の境界面に垂直な成分は連続

の境界条件が成り立つ。

- (5) 境界条件 1 が成り立つことを示せ。その際、図 2b) に示すような境界面をまたぐ長方形の積分経路 C とそれが囲む面 S を考え、次のストークスの定理を用いよ。なお、 $\vec{A}$ は任意のベクトルである。

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

入射波が境界面に到達すると、反射波と透過波に分かれる。電場は x 軸方向、磁場は y 軸方向を向いているとし、入射波の電場ベクトルを $\vec{E}^{\text{in}} \equiv E_x^{\text{in}} \hat{x}$ 、磁場ベクトルを $\vec{H}^{\text{in}} \equiv H_y^{\text{in}} \hat{y}$ などとおく。ここで $\hat{x}$ ($\hat{y}$) は x 軸 (y 軸) 方向の単位ベクトルである。反射波と透過波も同様であるとし

$$\text{入射波: } E_x^{\text{in}} = E_0^{\text{in}} \exp[i(k^{\text{in}}z - \omega t)], \quad H_y^{\text{in}} = H_0^{\text{in}} \exp[i(k^{\text{in}}z - \omega t)]$$

$$\text{反射波: } E_x^{\text{rf}} = E_0^{\text{rf}} \exp[i(k^{\text{rf}}z - \omega t)], \quad H_y^{\text{rf}} = H_0^{\text{rf}} \exp[i(k^{\text{rf}}z - \omega t)]$$

$$\text{透過波: } E_x^{\text{tr}} = E_0^{\text{tr}} \exp[i(k^{\text{tr}}z - \omega t)], \quad H_y^{\text{tr}} = H_0^{\text{tr}} \exp[i(k^{\text{tr}}z - \omega t)]$$

とおく。以下、物質 1 の屈折率を n_1 、物質 2 の屈折率を n_2 とする。

- (6) 境界条件 1 と 2 から、電場と磁場について、それぞれの境界での接続条件を示せ。
- (7) 任意の時刻で境界条件が成立することから、全ての電磁波の角振動数は等しく ω である。この事実を用いて、以下の関係を示せ。

$$\frac{k^{\text{tr}}}{k^{\text{in}}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{i})$$

- (8) 反射係数 r を入射波と反射波の振幅比 $r \equiv \frac{E_0^{\text{rf}}}{E_0^{\text{in}}}$ と定義する。以下の関係を示せ。

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (\text{j})$$

- (9) 図 2c) は入射波の電場成分の実部 $\text{Re}(E_x^{\text{in}})$ の山が $z = 0$ に一致する瞬間を、その振幅と波長を 1 に規格化して図示している。空気 ($n_1 = 1.0$) からガラス ($n_2 = 1.5$) に入射する場合に、 $\text{Re}(E_x^{\text{rf}})$, $\text{Re}(E_x^{\text{tr}})$, および $\text{Re}(E_x^{\text{in}} + E_x^{\text{rf}})$ を解答用紙の図に示せ。また、ガラスから空気に入射する場合も同様に図示せよ。

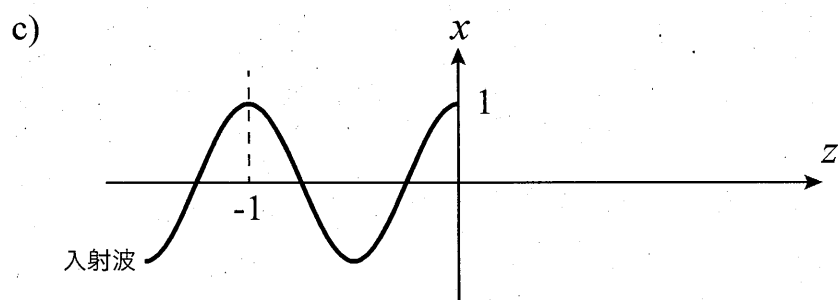
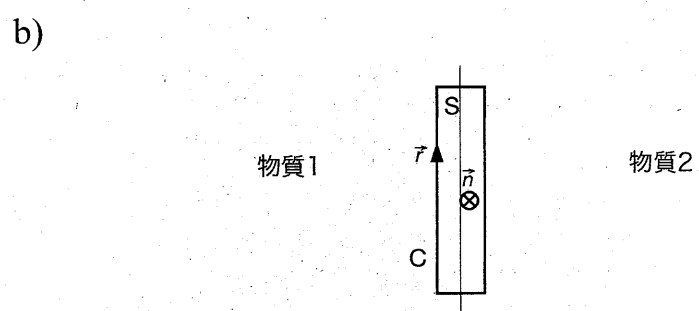
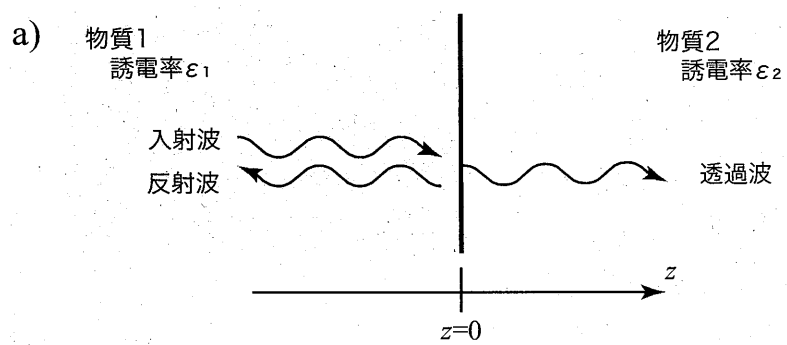


图 2

2025年10月入学, 2026年4月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 物理科学コース
試験問題 <一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第3問

質量 m の粒子が, x 軸上の調和振動子型ポテンシャル中を一次元運動している系を量子力学的に考える。ポテンシャルの極小値を原点に取るとき, この粒子の運動は次のハミルトニアンで与えられる。

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

ここで, p は運動量演算子 $p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, x は位置演算子, 振動数 ω は正の定数である。これに関連して, 互いにエルミート共役な演算子 $a, a^\dagger$ を次のように定義する。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + i \frac{p}{m\omega} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - i \frac{p}{m\omega} \right) \quad (\text{A})$$

以下の問いに答えよ。ただし, 必要に応じて, 次の公式は使用してよいものとする。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

- (1) 式 (A) の演算子 $a, a^\dagger$ の交換関係 $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a$ を計算せよ。
- (2) ハミルトニアン H_0 を $a, a^\dagger$ を用いて表せ。
- (3) 関数 $\phi_n(x) = (a^\dagger)^n \phi_0(x)$ が, 固有値 $\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ をもつハミルトニアン H_0 の固有関数であることを示せ。ここで, $\phi_0(x)$ は $a\phi_0(x) = 0$ を満たす基底状態の波動関数であり, n は0以上の整数である。
- (4) 系の規格化された基底状態と第一励起状態の波動関数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ を答えよ。
- (5) 規格化された第 n 励起状態 $\phi_n(x)$ に対して, 原点からの距離の二乗の期待値 $\langle x^2 \rangle$ を答えよ。

次に、質量 m の同種粒子である 2 つの粒子が、 x 軸上の調和振動子型ポテンシャル中を一次元運動している系を考える。2 つの粒子それぞれの運動量演算子を $p_1 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}$, $p_2 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_2}$, 位置演算子を x_1, x_2 とする。粒子間に $\beta x_1 x_2$ ($\beta > 0$) という形をもつ相互作用が働くとき、この系の運動は次のハミルトニアンで与えられる。

$$H = \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \beta x_1 x_2$$

以下の問いに答えよ。

(6) ハミルトニアン H を、次の変数変換を用いて考察する。

$$X = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$

- (i) 相互作用 $\beta x_1 x_2$ を変数 X, Y を用いて書き表せ。その上で、この相互作用は、粒子間に引力的に働くか、それとも斥力的に働くか、その理由とともに答えよ。
 - (ii) 題意の変数変換によって、 H は変数 X, Y をもつ 2 つの調和振動子型のハミルトニアン之和として記述できる。これを示し、その振動数 ω_X, ω_Y を答えよ。また、実際に、この系が 2 つの調和振動子の系として安定的に振る舞うためには、 β に更に条件が必要である。これを答えよ。
- (7) 系の 2 つの粒子がボーズ粒子である場合の波動関数を $\psi_{\text{Bose}}(x_1, x_2)$ とする。粒子交換をした関数を $\psi_{\text{Bose}}(x_2, x_1)$ としたとき、これを $\psi_{\text{Bose}}(x_1, x_2)$ を用いて表せ。同様に、フェルミ粒子である場合の波動関数 $\psi_{\text{Fermi}}(x_1, x_2)$ を用いて、粒子交換した関数 $\psi_{\text{Fermi}}(x_2, x_1)$ を表せ。その上で、この系の基底状態のエネルギー $E_{g,\text{Bose}}, E_{g,\text{Fermi}}$ と波動関数 $\psi_{g,\text{Bose}}(x_1, x_2), \psi_{g,\text{Fermi}}(x_1, x_2)$ を、それぞれ答えよ。ただし、スピンなどの他の量子力学的内部自由度は考えないものとする。
- (8) 系の 2 つの粒子がボーズ粒子である場合とフェルミ粒子である場合、それぞれについて、この系の基底状態における相対粒子間距離の二乗の期待値 $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle 2Y^2 \rangle$ を求め、フェルミ粒子が、ボーズ粒子よりも大きな値をもつことを示せ。また、その物理的意味を考察せよ。

2025年10月入学, 2026年4月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 物理科学コース
試験問題 <一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第4問

運動量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ とスピン変数 $\sigma = \pm 1$ で指定される1粒子エネルギーが

$$E_{\mathbf{p}, \sigma} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \sigma \mu_B H, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{a})$$

となる3次元のフェルミ気体 (スピン 1/2, 粒子数 N , 体積 V) を考える。ここで, $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ は運動エネルギー, m は粒子の質量, μ_B はボーア磁子, H は外部磁場である。ただし, T を絶対温度, k_B をボルツマン定数, $\beta = 1/(k_B T)$ を逆温度, $\hbar$ をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$ とする。必要であれば, 次の積分公式を用いても良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

はじめに十分高温領域を考え, この系を「スピン自由度 $\sigma = \pm 1$ をもつ古典理想気体」として取り扱う。以下の問いに答えよ。

(1) 次式で与えられる1粒子分配関数 Z_1 を計算せよ。

$$Z_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dx dy dz \int dp_x dp_y dp_z \sum_{\sigma=\pm 1} e^{-\beta E_{\mathbf{p}, \sigma}}$$

(2) N 粒子を含むこの系の分配関数は $Z_N = (Z_1)^N / N!$ と与えられること, およびエネルギーの期待値が $\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N$ のように計算できることを用いて, この系のエネルギー期待値 $\langle E \rangle$ を求めよ。

(3) この系の磁化 M は, 1粒子スピン変数の期待値を $\langle \sigma \rangle$ として

$$M = N \mu_B \langle \sigma \rangle$$

で与えられる。式 (a) および問 (2) で求めたエネルギー期待値の磁場依存性を考え, これを利用してこの系の磁化を求めよ。

(4) 問 (3) で求めた磁化に関する以下の問いに答えよ。

- (i) 磁場が十分に弱ければ、磁化は磁場 H に対し線型近似でき、結果は $M = \chi H$ の形にまとめられる。この帯磁率 χ を求めよ。
- (ii) 磁場が十分に強ければ、磁場 H の符号に応じて、磁化は一定値 $M = \pm M_0$ に近づく。この M_0 を求めよ。
- (iii) 磁化 M を磁場 H の関数として図示せよ。図は正負の磁場領域にわたり描くこと。

次に、十分に低温領域を考え、この系を「フェルミ縮退した理想量子気体」として取り扱う。以下ではフェルミ縮退した状況を考えるため、この系の化学ポテンシャルはフェルミエネルギー E_F で近似できるとする。

(5) 以下の問いに答えよ。

- (i) 1 粒子エネルギー $E_{p,\sigma}$ で指定される状態の温度 T における平均粒子数 (フェルミ分布関数) $f(E_{p,\sigma})$ の表式を書け。ただし、フェルミエネルギーを E_F とする。
- (ii) 体積 V の容器に閉じ込められたこの粒子の状態密度は、 $D(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon}$ となる。このとき、係数 A を求めよ。ただし、 ε は 1 粒子の運動エネルギーである。
- (iii) 状態密度を利用してこの系の全粒子数 N を計算せよ。そして、フェルミエネルギー E_F 、フェルミエネルギーでの状態密度 $D(E_F)$ 、および定数のみを用いて N を表せ。

(6) この系の磁化は、以下のように表現できる。

$$M = \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{D(\varepsilon)}{2} \sigma \mu_B f(\varepsilon - \sigma \mu_B H)$$

磁場が十分に弱ければ、フェルミ分布関数は磁場 H の 1 次関数で近似でき、磁化は $M = \chi H$ の形にまとめられる。この帯磁率 χ を計算せよ。その際、フェルミ縮退したフェルミ分布関数の微分について成り立つ近似式 $f'(\varepsilon) \approx -\delta(\varepsilon - E_F)$ を用いること。ここで $\delta(\varepsilon)$ は Dirac のデルタ関数である。

(7) 問 (4) で求めた高温近似の帯磁率 χ 、および 問 (6) で求めた低温近似の帯磁率 χ の結果に基づき、低温極限から高温極限にわたる全温度領域で予想される帯磁率 χ の概形を、横軸を $k_B T/E_F$ としてグラフに図示せよ。

(8) 問 (5)-(iii) で求めた関係式により状態密度を消去すると、問 (6) の結果は

$$M = K \mu_B \times \frac{\mu_B H}{E_F}$$

の形にまとめられる。この係数 K を求めよ。

更に、以下の文章に続ける形で、この結果の意味を説明せよ。

「フェルミ縮退した極限では、 $0 \leq \varepsilon \leq E_F$ のエネルギーをもつ全粒子のうち、外部磁場 H に応答してスピン偏極できるのは …」