２０２６年４月入学

岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程

物理科学コース

試験問題　<一般入試>

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２６年４月入学
岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程
物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学)】

第１問

バイオリンやギターなどの弦楽器は，弦の振動により音が発生する。以下ではこのような弦の振動を考えよう。図1(a) のように，長さ L，線密度 σ の弦が両端 $(x=0,L)$ で固定されている。弦には張力 T が働き，弦が振動するとき，弦は張られている方向 (x 方向) とは垂直に u だけ変位し，張力 T によって $u=0$ に戻ろうとする復元力が働く。時刻 t，位置 x における弦の変位を $u(x,t)$ とする。重力の影響は考えないものとして，以下の各問いに答えよ。

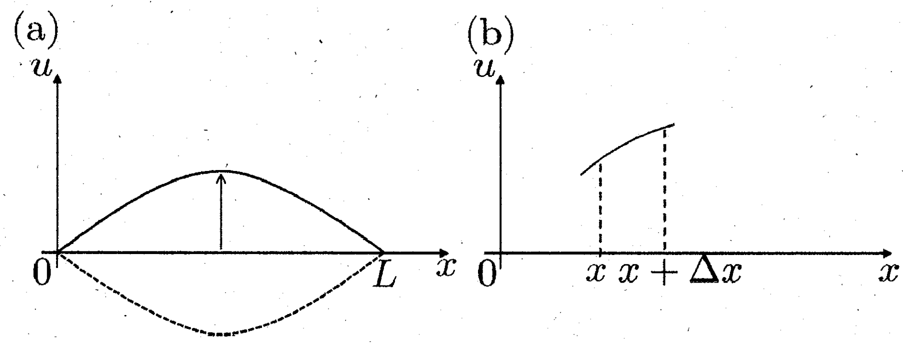

図１

(1) 図1(b) のような弦の x から $x+\Delta x$ までの微小区間を考える。この微小区間において弦と x 軸との成す角度が小さいとして，微小区間に働く合力 f が

$$f \approx T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Delta x \tag{a}$$

で与えられることを示せ。

(2) 微小区間に関する運動方程式をたて，変位 $u(x,t)$ に対する偏微分方程式が

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{b}$$

の形に書けることを導け。また，α^2 を求め，α がどのような物理量であるかを説明せよ。

(3) 変位 $u(x,t)$ が位置 x のみの関数 $X(x)$ と時刻 t のみの関数 $F(t)$ を用いて $u(x,t)=X(x)F(t)$ と表せるとする。

(i) $X(x)$ および $F(t)$ が満たすべき微分方程式をそれぞれ求めよ。

(ii) $X(x)$ および $F(t)$ の微分方程式を解き，この弦の振動の波数 k_n と対応する固有角振動数 ω_n を求めよ。ここで n は自然数 $(n=1,2,\cdots)$ を表す。

(iii) 固有角振動数の離散化が生じる理由について，境界条件の観点から説明せよ。

(iv) この弦の固有角振動数 ω_n に対する解 $u_n(x,t)$ を示し，振動の一般解が

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \ \sin(\omega_n t+\phi_n) \tag{c}$$

で与えられることを示せ。ここで A_n は固有角振動数 ω_n を持つ振動成分の振幅，ϕ_n は位相を表す。

(4) 図2のように，弦の真ん中を u 方向に h だけつまんで引っ張り，三角状になった弦を静かに解放した。

(i) この場合の弦の振動は，式 (c) において n が奇数の振動成分のみから構成される。その理由を定性的に説明せよ。

(ii) $\phi_n=\pi/2$ における式 (c) の係数 A_n を求め，奇数 n に対して

$$A_n=\frac{8h}{\pi^2 n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \tag{d}$$

が得られることを導け。

(iii) 式 (d) は，n が低次の項が弦の変位において支配的であり，高次の項の寄与は急速に小さくなることを示している。$t=0$ における N 次の項までの和を

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{N} A_n \sin k_n x \tag{e}$$

として，$N=1,3,5$ の場合の $u(x,0)$ のグラフをそれぞれ図示せよ。

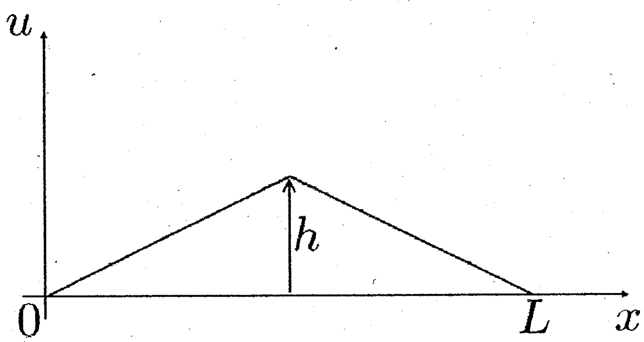

図2

２０２６年４月入学
岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程
物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

真空中の電磁波は，その電場成分 $\vec{E}$ が以下の波動方程式に従う。

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0 \tag{a}$$

ここで c は光速である。この波動方程式の平面波解は

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

と表される。ここで $\vec{E}_0$ は座標によらない定数ベクトル，$\vec{k}$ は波数ベクトル，ω は角振動数，$\vec{r}$ は位置ベクトルである。

(1) z 方向に進む平面波には，電場の z 成分 E_z が存在しないことを示せ。電荷がない場合のガウスの法則 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ を用いて良い。

以下では，z 方向に進む角振動数 ω の電磁波について考える。問 (1) の結果より，この電場は，x 成分 E_x と y 成分 E_y

$$E_x = a_x \cos(kz - \omega t + \delta_x)$$
$$E_y = a_y \cos(kz - \omega t + \delta_y)$$

の２成分の合成として記述できる。ここで k は波数，δ_x と δ_y は任意の位相で E_x と E_y の位相が異なる場合があることを示している。E_x と E_y で合成される電場がどのような振動を示すかを考えよう。

(2) E_x 成分しかない場合（$a_x = A,\ a_y = 0$）の振動の軌跡を E_x-E_y 平面内で図示すると，図３のようになる。同様にして，E_x と E_y の振幅が同じ場合（$a_x = a_y = A$）の振動の軌跡を，以下の各位相差ごとに E_x-E_y 平面内で図示せよ。図には各軸方向の最大・最小値や切片の値なども適宜記入し，曖昧さが無いようにすること。

$$\delta_x - \delta_y = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi \tag{b}$$

次に、ワイヤーグリッド（細い金属線を等間隔に並べたもの）など特定の方向の電場成分だけを透過する物体に電磁波を入射する場合を考えよう。ワイヤーグリッドの場合、金属線に平行な電場成分は透過せず、垂直な電場成分のみが透過する。このことをふまえて以下の問いに答えよ。

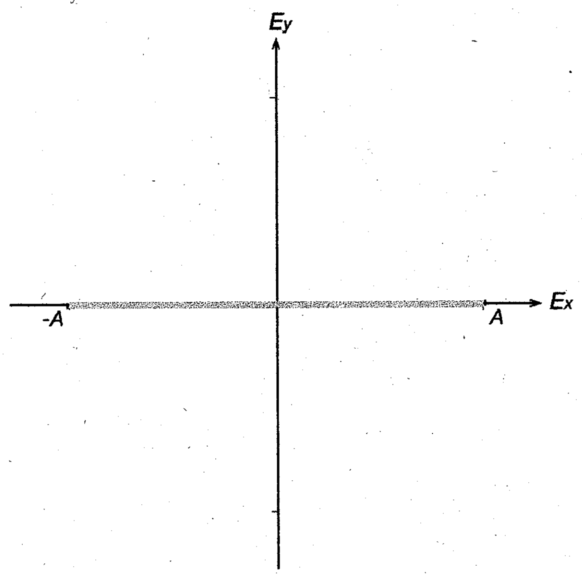

図 3

(3) 金属線が直線 $y = x$ に平行になるようにワイヤーグリッドを配置した。問 (2) と同様に E_x と E_y に位相差を持つ電磁波を入射した場合，透過した電場の振幅の大きさを位相差 $(\delta_x - \delta_y)$ の関数として求めよ。また透過した電場の振動の軌跡を式 (b) の各位相差ごとに E_x-E_y 平面内で図示せよ。

(4) 金属線が x 軸に平行になるようにワイヤーグリッドを配置した。問 (3) と同様に透過した電場の振動の軌跡を式 (b) の各位相差ごとに E_x-E_y 平面内で図示せよ。

２０２６年４月入学
岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程
物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第3問

質量 m の粒子が, x 軸上の調和振動子型ポテンシャル中を一次元運動している系を量子力学的に考える。ポテンシャルの極小値を原点とするとき，この粒子の運動は次のハミルトニアンで与えられる。

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

ここで，$\hat{p}$ は運動量演算子 $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{x}$ は位置演算子とする。ω は角振動数であり正の定数，$\hbar$ は h をプランク定数として $\frac{h}{2\pi}$ である。また，消滅演算子 $\hat{a}$ 及び，エルミート共役な生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を次のように定義する。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right), \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \qquad (a)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 式 (a) の演算子 $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ について交換関係 $[\hat{a},\ \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を計算せよ。

(2) この系の基底状態 $|0\rangle$ は $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす。個数演算子を $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ とする。状態 $|n\rangle = (\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ が，$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ を満たすこと，すなわち，固有値 n をもつ $\hat{N}$ の固有状態であることを示せ。ここで，n は0以上の整数である。

(3) ハミルトニアン $\hat{H}_0$ を個数演算子 $\hat{N}$ を用いて表せ。

次に，質量 m の粒子が，xy 平面上の等方的な調和振動子型ポテンシャル中を運動している系を考える。調和振動子ポテンシャルの最小点を原点とするとき，この系の運動は次のハミルトニアンで与えられる。

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$$

$\hat{p}_x$ と $\hat{p}_y$ は，それぞれ，x 方向と y 方向の運動量演算子，$\hat{x}$ と $\hat{y}$ は位置演算子，ω は角振動数であり正の定数である。また，上にならって，互いにエルミート共役な演算子 $\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger$ を次のように定義する。

$$\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}_x}{m\omega}\right), \qquad \hat{a}_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}_x}{m\omega}\right)$$

$$\hat{a}_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{y} + i\frac{\hat{p}_y}{m\omega}\right), \qquad \hat{a}_y^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{y} - i\frac{\hat{p}_y}{m\omega}\right)$$

以下の問いに答えよ。

(4) このハミルトニアンは z 軸周りの回転に対して対称性を持つ。以下の問いに答えよ。

(i) ハミルトニアン $\hat{H}$ と角運動量演算子 $\hat{l}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ を $\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger$ を用いて表せ。

(ii) $[\hat{H}, \hat{l}_z] = 0$ を示し，角運動量 l_z が保存することを説明せよ。

(5) $[\hat{H}, \hat{l}_z] = 0$ が成り立つことにより，この系の状態は，ハミルトニアン $\hat{H}$ と角運動量演算子 $\hat{l}_z$ の同時固有状態 $|E, l_z\rangle$ として記述できる。ここで，エネルギー E および角運動量 l_z は，$\hat{H}$ と $\hat{l}_z$ の固有値である。この同時固有状態をハミルトニアン $\hat{H}$ の固有状態 $|n_x, n_y\rangle = |n_x\rangle|n_y\rangle$ を用いて，構成することを考える。ここで，$|n_x\rangle$ は，x 方向の個数演算子 $\hat{N}_x = \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x$ の n_x を固有値として持つ固有状態，$|n_y\rangle$ は，y 方向の個数演算子 $\hat{N}_y = \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y$ の n_y を固有値として持つ固有状態である。以下の問いに答えよ。

(i) 基底状態 $|n_x = 0,\ n_y = 0\rangle$ が，ハミルトニアン $\hat{H}$ と角運動量演算子 $\hat{l}_z$ の同時固有状態であることを示せ。

(ii) ハミルトニアン $\hat{H}$ の第一励起状態は，$|n_x = 1, n_y = 0\rangle$ と $|n_x = 0, n_y = 1\rangle$ である。以下の問いに答えよ。

① $|n_x = 1, n_y = 0\rangle$ と $|n_x = 0, n_y = 1\rangle$ を基底として，角運動量演算子 $\hat{l}_z$ の行列表示を求めよ。

② ①で解答した $\hat{l}_z$ の表現行列を対角化し，ハミルトニアン $\hat{H}$ と $\hat{l}_z$ の固有値 E, l_z 及び規格化された同時固有状態 $|E, l_z\rangle$ を求めよ。更に，解として得られた状態が古典的にどのような状態に対応するか，説明せよ。

２０２６年４月入学
岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程
物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

スピン 1/2，質量 m の粒子からなる３次元の理想フェルミ気体を考える。T を温度，k_{B} をボルツマン定数，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ を逆温度，h をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$ とする。

以下では，$k_{\mathrm{B}}T \ll E_F$ でフェルミ縮退した状況を考える。系の化学ポテンシャルはフェルミエネルギー E_F で近似でき，また，粒子間の相互作用は無視できるとする。以下の問いに答えよ。

(1) １粒子エネルギーを ε とするとき，温度 T におけるフェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ の表式を書け。

(2) 温度 $T = 0$ におけるフェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ の概形を描け。また，同じ図の中に $k_{\mathrm{B}}T \ll E_F$ を満たす有限温度での $f(\varepsilon)$ の概形も描け。その際，図中にはフェルミエネルギー E_F と熱エネルギー $k_{\mathrm{B}}T$ を示すこと。

(3) 粒子 N 個が体積 V の容器に閉じ込められたときの状態密度を $D(\varepsilon)$ とすると，$D(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon}$ となる。係数 A を求めよ。

(4) 粒子数 N をフェルミエネルギー E_F およびフェルミエネルギーでの状態密度 $D(E_F)$ を用いて表せ。

(5) 化学ポテンシャルがフェルミエネルギー E_F で近似できるという条件の下では，化学ポテンシャルは温度依存性を持たない。このとき，以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial}{\partial T} f(\varepsilon) = -\left(\frac{\varepsilon - E_F}{T}\right) f'(\varepsilon) \tag{a}$$

ただし，$f'(\varepsilon)$ は f の ε に関する微分である。

次に，この系の低温での等積比熱を計算するため，全エネルギー $E = \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\varepsilon f(\varepsilon)$ の温度に関する微分を考える。この式を温度で微分すれば，温度に依存するのはフェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ だけである。これと式 (a) より，次式が得られる。

$$\frac{\partial E}{\partial T} = -\int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\varepsilon \left(\frac{\varepsilon - E_F}{T}\right) f'(\varepsilon)$$

以下の問いに答えよ。

(6) 上式において，$-f'(\varepsilon)$ はフェルミエネルギー E_F 近傍で鋭いピークを持つ。更に，E_F 近傍では状態密度のエネルギー依存性は弱く，近似的に積分記号の外に出せる。これらを用いて，この系の低温比熱 $C(T)$ を計算せよ。その際，フェルミ縮退した状況で成り立つ以下の公式を用いても良い。

$$\int_0^\infty d\varepsilon\,(\varepsilon - E_F)f'(\varepsilon) = 0, \qquad \int_0^\infty d\varepsilon\,(\varepsilon - E_F)^2 f'(\varepsilon) = -\frac{\pi^2}{3}(k_{\mathrm{B}}T)^2$$

(7) 問 (4) で求めた関係式により状態密度を消去すると，問 (6) の結果は

$$C(T) = Bk_{\mathrm{B}} \times \frac{k_{\mathrm{B}}T}{E_F}$$

の形にまとめられる。係数 B を求めよ。
更に，以下の文章に続ける形で，この結果の意味を説明せよ。
「フェルミ縮退した極限では，熱エネルギー $k_{\mathrm{B}}T$ によって励起されるのは $\cdots$」